Agro 2005 option Biochimie.

Banque <<Agro-Véto>>

A - 0605T

MATHÉMATIQUES 1

Durée : 3 heures

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Le sujet comporte un seul problème divisé en cinq parties. L'ensemble des parties I, II, III d'une part, la partie IV et la partie V sont dans une large mesure indépendantes. On tracera le graphe sur une feuille de papier millimétré.

I] Préliminaires.

Dans le problème pour tout a réel, on note $\mathcal{E}$ l'équation différentielle :

$$(e^x - a)y'(x) + ay(x) = e^x$$

et on note $\mathcal{E}_0$ l'équation différentielle homogène associée : $(e^x - a)y'(x) + ay(x) = 0$.

a) Soit a un réel non nul, déterminer deux réels α et β tel que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \frac{1}{u(u-a)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta}{u-a}.$$

b) Déterminer une primitive de la fonction $\frac{1}{u(u-a)}$. On n'oubliera pas le cas $a = 0$.

c) On suppose $a \leq 0$; déterminer l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_0$ sur $\mathbb{R}$. On admettra qu'aucune solution de cette équation ne s'annule sur $\mathbb{R}$ à l'exception de la fonction nulle.

d) On suppose $a > 0$; on note $I_1 =]-\infty, \ln(a)[$ et $I_2 =]\ln(a), +\infty[$.
Déterminer les solutions de $\mathcal{E}_0$ sur I_1 et I_2.

II] Solutions de $\mathcal{E}$.

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, K une fonction continuement dérivable sur I, on pose $y(x) = \dfrac{K(x)e^x}{e^x - a}$.

a) On suppose $a \leq 0$ et I=$\mathbb{R}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur K pour que y soit solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

b) Reprendre cette question si $a > 0$ et I=I_1 ou I=I_2.

T.S.V.P

III] Conditions initiales.

Dans la suite du problème, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \frac{xe^x}{e^x - a} = \frac{x}{1 - ae^{-x}}.$$

a) On suppose dans cette question $a \leq 0$.

Vérifier que f_a est l'unique solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ vérifiant la condition initiale : $y(0) = 0$.

b) On suppose dans cette question $a > 0$
Si $a \in]0, 1[$, déterminer une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$ sur I_2 vérifiant la condition initiale : $y(0) = 0$.
Reprendre ce travail si $a \in]1, +\infty[$. (on changera I_2 en I_1.)

IV] Etude de la fonction f_1.

a) Montrer que f_1 se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, qu'on notera encore f_1. Montrer que ce prolongement est dérivable en 0. Étudier les variations de cette fonction et ses branches infinies. On résumera le tout sous la forme d'un tableau de variation.

b) Tracer sur feuille de papier millimétré le graphe de la fonction f_1. On prendra pour échelle : l'unité est 2 cm.

V] L'aire sous f_1.

a) Montrer que $x^2 f_1(x)$ tend vers 0 quand x tend vers -∞.

b) Montrer que pour tout $A < 0$, la fonction g définie de $]-\infty, A[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, x \leq A,\ g(x) = \int_x^A |f_1(t)|dt$$

est décroissante et bornée.

c) En déduire l'existence de $\lim_{x \to -\infty} (\int_x^A f_1(t)dt)$, puis celle de $\lim_{x \to -\infty} (\int_x^0 f_1(t)dt)$. On notera μ cette limite qu'on se propose de calculer.

d) Montrer que $\forall x < 0, \int_x^0 f_1(t)dt = \int_{e^x}^1 \frac{\ln(u)}{u-1}du$; en déduire :

$$\mu = \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}du.$$

e) Montrer que $\forall u \in]0,1[, \dfrac{\ln(u)}{u-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(u^n \ln(u))$.

f) Montrer que $\int_0^1 \ln(u)du = -1$.
Indication : On intègrera de ε à 1 pour $\varepsilon \in]0,1[$, puis on fera tendre ε vers 0.

g) Soit n un entier naturel non nul ; montrer que $\int_0^1 u^n \ln(u)du = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
Indication : On intègrera de ε à 1 pour $\varepsilon \in]0,1[$, puis on fera tendre ε vers 0 après intégration par parties.

h) On admet les égalités :

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1}du = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 u^n \ln(u)du\right) \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En déduire μ.

FIN.